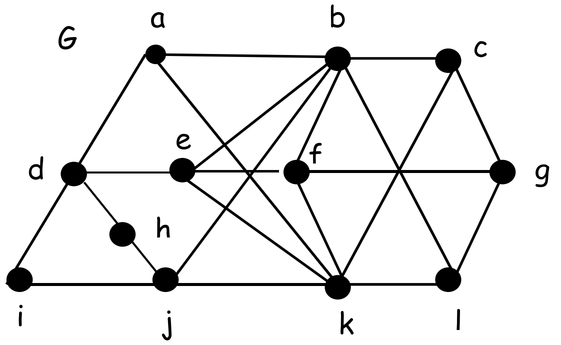
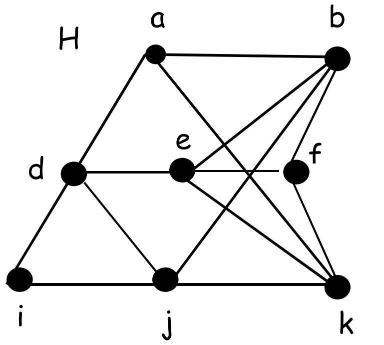
MATEMÁTICA DISCRETA II - MI

TERCER PARCIAL (SOLUCIONES)

Ejercicio 1 (16 puntos)

Se consideran los grafos *G* y H definidos por las siguientes figuras





A) Decide razonadamente si *G* es un grafo planar.

B) Aplica el algoritmo de Brelaz para hallar una coloración de los vértices de *G*.

C) Halla el número cromático y el número de independencia de *G*.

D) En el grafo H se define la siguiente función de pesos

$w : V_H \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $w(a) = 3$, $w(b) = 4$, $w(d) = 5$, $w(e) = 2$, $w(f) = 5$, $w(i) = 3$, $w(j) = 2$, $w(k) = 4$.

Halla en H un conjunto independiente de vértices cuyo peso total sea máximo, aplicando el algoritmo adecuado.

Solución

A) No es un grafo planar puesto que los vértices {b, c, f, g, k, l} forman un subgrafo $K_{3,3}$.

B) La siguiente tabla refleja el orden de coloración de los vértices y el color asignado aplicando el algoritmo de Brelaz:

Vértices ordenados	**b**	**k**	**d**	**e**	**f**	**j**	**a**	**c**	**g**	**l**	**h**	**i**
Grado saturación		0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0
		1	1		2	1	1	1	0	1	0	0
		2	1			1	1	1	1	1	0	0
			1			1	1	1	1	1	0	0
						1	1	1	1	1	1	1
							1	1	1	1	2	2
							1	1	1	1		2
							1	1	1	1		
							1	1		1		
							1	1		1		
								1		1		
										1		
Orden de coloración	1	4	5	2	3	6	10	11	9	12	7	8
Color	**1**	**1**	**1**	**2**	**3**	**2**	**2**	**2**	**1**	**2**	**3**	**3**

C) El grafo *G* tiene un ciclo impar {b, f, e, b}, por tanto, no es bipartido y $2 < \chi(G) \leq \Delta(G) = 6$.

MATEMÁTICA DISCRETA II - MI

TERCER PARCIAL (SOLUCIONES)

El algoritmo colorea con tres colores, luego $\chi(G) = 3$.

El conjunto de vértices, ordenados de mayor a menor grado, es V = [h, i, a, c, g, l, d, e, f, j, b, k]

Aplicando el algoritmo de independencia, obtenemos un conjunto independiente maximal de *G*, de tamaño máximo, S = {h, i, a, c, l, e} y $\alpha(G) = 6$.

D) El objetivo es construir un conjunto independiente de valor máximo. $T(x) = val(x) - \sum_{z \in N(x)} val(z)$

1) I = [], P = V = [a, b, d, e, f, i, j, k]

   T(a) = – 10, T(b) = – 8, T(d) = – 5, T(e) = – 16, T(f) = – 5, T(i) = – 4, T(j) = – 14, T(k) = – 8

   I = [i], P = [a, b, e, f, k]

   T(a) = – 5, T(b) = – 6, T(e) = – 11, T(f) = – 5, T(k) = – 6

   I = [i, a], P = [e, f], T(e) = – 3, T(f) = 3

   I = [i, a, f] con valor total 11.

2) I = [], P = V = [b, d, e, j, k]

   T(b) = 0, T(d) = 1, T(e) = – 11, T(j) = – 11, T(k) = 0

   I = [b], P = [d, k], T(d) = 5, T(k) = 4

   I = [b, d], P = [k], T(k) = 4

   I = [b, d, k] con valor total 13.

3) I = [], P = V = [e, j], T(e) = 2, T(j) = 2

   I = [e], P = [j], T(j) = 2

   I = [e, j] con valor total 4.

Ejercicio 2 (6 puntos)

Razona si las siguientes afirmaciones sobre un grafo simple *G* = (V, A) son verdaderas o falsas:

A) Si *G* es un grafo plano conexo que tiene n = 15 vértices y q = 30 aristas, entonces su grafo dual *G** tiene n* = 12 vértices.

B) Si *G* es un grafo conexo que tiene n = 15 vértices y q = 30 aristas y no contiene ciclos de longitud 3, entonces es planar.

C) Si *G* es un grafo plano que tiene n = 15 vértices, q = 30 aristas y c = 19 caras, entonces tiene 3 componentes conexas.

Solución

A) FALSO: *G* plano, n = 15, q = 30 entonces c = 2 – n + q = 17 $\Rightarrow$ n* = 17.

B) FALSO: Si *G* es planar entonces $q \le \frac{z(n-2)}{z-2} \le \frac{4}{2}13 = 26$, pero q = 30.

C) VERDADERO: $n - q$ + c = k + 1

MATEMÁTICA DISCRETA II - MI

TERCER PARCIAL (SOLUCIONES)
Ejercicio 3 (3 ptos.)

Utiliza las funciones generatrices para hallar el número de formas distintas de pintar las 12 salas idénticas de un museo usando 6 colores, sabiendo que de tres de ellos se dispone de cantidad ilimitada de pintura, pero de los otros tres colores sólo hay pintura para dos salas.

Solución

$f(x) = (1+x+x^2)^3\,(1+x+x^2+\ldots+x^{12})^3 = (1-x^3)^3\,(1-x^{13})^3(1+x+x^2+\ldots)^6$

$= (1-3x^3+3x^6-x^9)(1-3x^{13}+3x^{26}-x^{39})(1+x+x^2+\cdots)^6$

$$a_{12} = CR_{n=6,k=12} - 3CR_{n=6,k=9} + 3CR_{n=6,k=6} - CR_{n=6,k=3} = \binom{17}{5} - 3\binom{14}{5} + 3\binom{11}{5} - \binom{8}{5} = 1512$$